Aplicaciones de la Integral definida

Ejercicio nº 1.-

Halla el área del recinto delimitado por la función $f(x) = x^3 - 4x$ y el eje X

Ejercicio nº 2.-

Calcula el área comprendida entre la función $y = x^2 + 2x + 3$, el eje X y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

Ejercicio nº 3.-

Halla el área del recinto limitado por la parábola $f(x) = x^2 - x - 6$ y el eje X en el intervalo [0, 4].

Ejercicio nº 4.-

Halla el área limitada por la función $y = x^3 + x^2 - 2x$ y el eje X.

Ejercicio nº 5.-

Calcula el área comprendida entre la función $y = x^2 - 1$ y el eje X en el intervalo [0, 2].

Ejercicio nº 6.-

Halla el área comprendida entre la curva $y = 2x^2 + 2x - 1$ y la recta $y = 4x + 3$.

Ejercicio nº 7.-

Calcula el área del recinto limitado por las curvas $y = x^2 - 1$ e $y = 1 - x^2$.

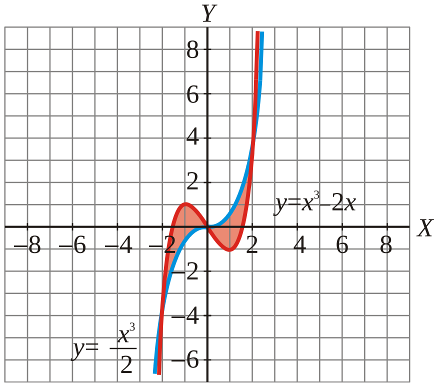
Ejercicio nº 8.-

Calcula el área comprendida entre las curvas $y = 2x^2 - 5x$, $y = x^2 - 2x$ y $x = -1$.

Ejercicio nº 9.-

Las siguientes gráficas corresponden a las funciones:

$$y = x^3 - 2x \quad e \quad y = \frac{x^3}{2}$$



Calcula el área del recinto limitada por ellas.

Ejercicio nº 10.-

Calcula el área limitada por la parábola $y = x^2 + 1$, la recta $y = 4x - 3$ y el eje Y.

Soluciones Aplicaciones de I. definida

Ejercicio nº 1.-

Halla el área del recinto delimitado por la función $f(x) = x^3 - 4x$ y el eje X

Solución:

- Puntos de corte con el eje X:

$$x^3 - 4x = 0 \quad \to \quad x\left(x^2 - 4\right) = 0 \quad \to \quad x_1 = -2,\ x_2 = 0,\ x_3 = 2$$

- Hay dos recintos: I $[-2, 0]$; II $[0, 2]$

- $G(x) = \int \left(x^3 - 4x\right) = \dfrac{x^4}{4} - 2x^2$

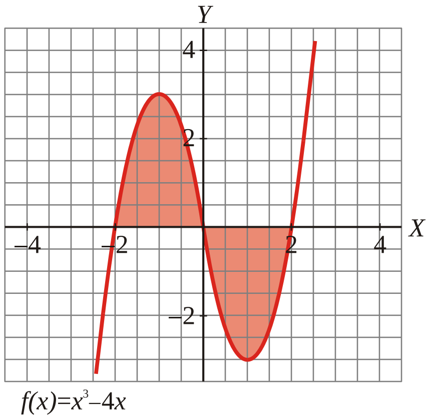
- $G(-2) = -4$; $G(0) = 0$; $G(2) = -4$

- Área del recinto I $= \left|G(0) - G(-2)\right| = 4$

- Área del recinto II $= \left|G(2) - G(0)\right| = 4$

- Área total $= 4 + 4 = 8\ \text{u}^2$

- La gráfica no es necesaria, pero la incluimos para visualizar el resultado:



Ejercicio nº 2.-

Calcula el área comprendida entre la función $y = x^2 + 2x + 3$, el eje X y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

Solución:

- Puntos de corte con el eje X:

$$x^2 + 2x + 3 = 0 \quad \to \quad x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 12}}{2}$$

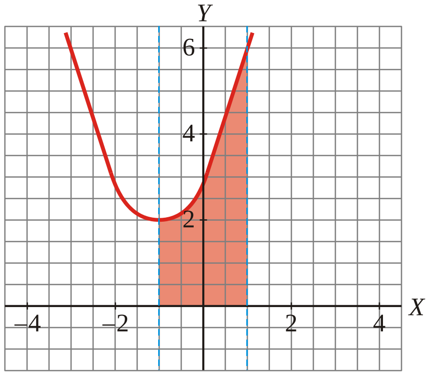
No corta al eje X.

- $G(x) = \int (x^2 + 2x + 3) = \frac{x^3}{3} + x^2 + 3x$

- $G(-1) = \frac{-7}{3}; \quad G(1) = \frac{13}{3}$

- Área $= \left| G(1) - G(-1) \right| = \frac{20}{3} u^2$

- La gráfica no es necesaria, pero la incluimos para visualizar el resultado:



Ejercicio nº 3.-

Halla el área del recinto limitado por la parábola $f(x) = x^2 - x - 6$ y el eje X en el intervalo [0, 4].

Solución:

- Puntos de corte con el eje X:

$$x^2 - x - 6 = 0 \rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

En el intervalo [0, 4] solo está $x_2 = 3$.

- Hay dos recintos: I [0, 3]; II [3, 4]

- $G(x) = \int (x^2 - x - 6) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x$

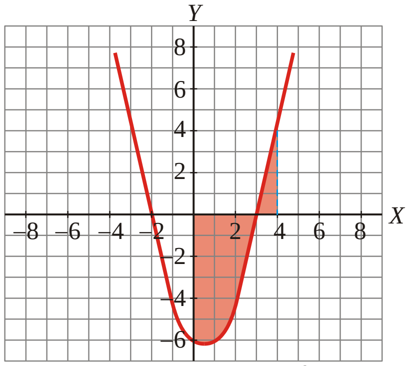
- $G(0) = 0; \quad G(3) = \frac{-27}{2}; \quad G(4) = \frac{-32}{3}$

- Área del recinto I $= \left| G(3) - G(0) \right| = \frac{27}{2}$

  Área del recinto II $= \left| G(4) - G(3) \right| = \frac{17}{6}$

  Área total $= \frac{27}{2} + \frac{17}{6} = \frac{49}{3} u^2$

- La gráfica no es necesaria, pero la incluimos para visualizar el resultado:



$f(x)=x^2–x–6$

Ejercicio nº 4.-

Halla el área limitada por la función $y = x^3 + x^2 - 2x$ y el eje X.

Solución:

- Puntos de corte con el eje X:

$$x^3 + x^2 - 2x = 0 \;\rightarrow\; x\left(x^2 + x - 2\right) = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} x_1 = 0 \\ x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \dfrac{-1 \pm 3}{2} \;\rightarrow\; \begin{cases} x_2 = 1 \\ x_3 = -2 \end{cases} \end{cases}$$

- Hay, entonces, dos recintos:

$$\text{I}\left[-2,\ 0\right];\quad \text{II}\left[0,\ 1\right]$$

- $G(x) = \int \left(x^3 + x^2 - 2x\right) = \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^3}{3} - x^2$

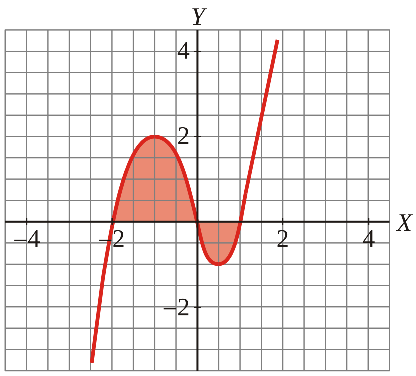
- $G(-2) = -\dfrac{8}{3};\quad G(0) = 0;\quad G(1) = \dfrac{-5}{12}$

- $\text{Área del recinto I} = \left|G(0) - G(-2)\right| = \dfrac{8}{3}$

  $\text{Área del recinto II} = \left|G(1) - G(0)\right| = \dfrac{5}{12}$

- $\text{Área total} = \dfrac{8}{3} + \dfrac{5}{12} = \dfrac{37}{12}\,\text{u}^2$

- La gráfica no es necesaria, pero la incluimos para visualizar el resultado:



$y=x^3+x^2–2x$

Ejercicio nº 5.-

Calcula el área comprendida entre la función $y = x^2 - 1$ y el eje X en el intervalo [0, 2].

Solución:

- Puntos de corte con el eje X:

$$x^2 - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x_1 = -1,\ x_2 = 1$$

Solo nos sirve $x = 1$ en el intervalo [0, 2].

- Tenemos dos recintos:

I [0, 1]; II [1, 2]

- $G(x) = \int (x^2 - 1) = \dfrac{x^3}{3} - x$

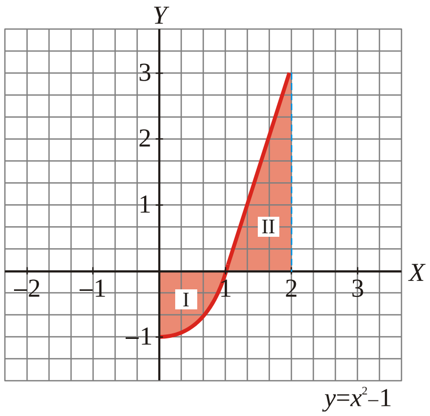
- $G(0) = 0;\quad G(1) = \dfrac{-2}{3};\quad G(2) = \dfrac{2}{3}$

- Área del recinto I $= |G(1) - G(0)| = \dfrac{2}{3}$

Área del recinto II $= |G(2) - G(1)| = \dfrac{4}{3}$

Área total $= \dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{3} = \dfrac{6}{3} = 2\text{u}^2$

- La gráfica no es necesaria; la incluimos para visualizar el resultado:



Ejercicio nº 6.-

Halla el área comprendida entre la curva $y = 2x^2 + 2x - 1$ y la recta $y = 4x + 3$.

Solución:

- $2x^2 + 2x - 1 - (4x + 3) = 2x^2 - 2x - 4$

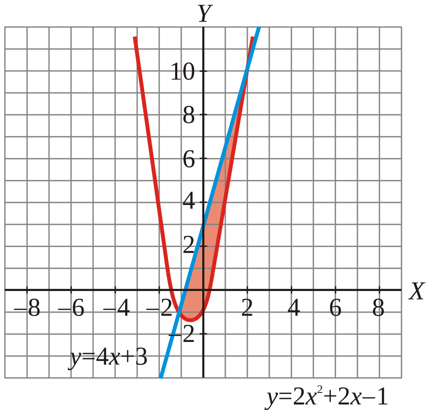
- $2x^2 - 2x - 4 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 - x - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$

- $G(x) = \int \left(2x^2 - 2x - 4\right) = \dfrac{2x^3}{3} - x^2 - 4x$

- $G(-1) = \dfrac{7}{3}; \quad G(2) = \dfrac{-20}{3}$

- $\text{Área} = \left|G(2) - G(-1)\right| = 9\,\text{u}^2$

Las gráficas no son necesarias, pero las incluimos para visualizar el resultado:



Ejercicio nº 7.-

Calcula el área del recinto limitado por las curvas $y = x^2 - 1$ e $y = 1 - x^2$.

Solución:

- $x^2 - 1 - \left(1 - x^2\right) = 2x^2 - 2$

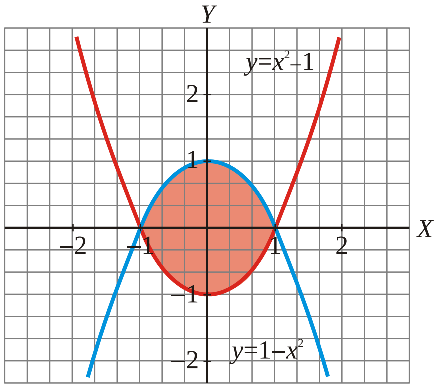
- $2x^2 - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad x_1 = -1, \; x_2 = 1$

- $G(x) = \int \left(2x^2 - 2\right) = \dfrac{2x^3}{3} - 2x$

- $G(-1) = \dfrac{4}{3}; \quad G(1) = \dfrac{-4}{3}$

- $\text{Área} = \left|G(1) - G(-1)\right| = \dfrac{8}{3}\,\text{u}^2$

Las gráficas no son necesarias, pero las incluimos para visualizar el resultado:



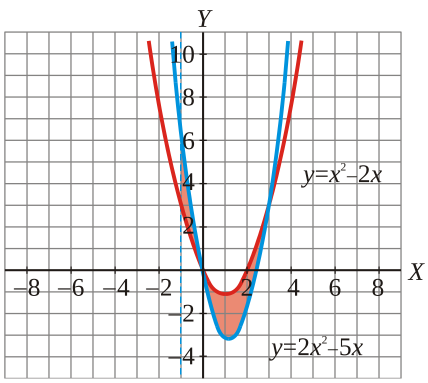
Ejercicio nº 8.-

Calcula el área comprendida entre las curvas $y = 2x^2 - 5x$, $y = x^2 - 2x$ y $x = -1$.

Solución:

- $2x^2 - 5x - \left(x^2 - 2x\right) = x^2 - 3x$
- $x^2 - 3x = 0 \quad \rightarrow \quad x_1 = 0, \; x_2 = 3$
- Hay dos recintos: I [-1, 0]; II [0, 3]
- $G(x) = \int \left(x^2 - 3x\right) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3x^2}{2}$
- $G(-1) = \dfrac{-11}{6}; \quad G(0) = 0; \quad G(3) = \dfrac{-9}{2}$
- Área del recinto I $= \left|G(0) - G(-1)\right| = \dfrac{11}{6}$
- Área del recinto II $= \left|G(3) - G(0)\right| = \dfrac{9}{2}$
- Área total $= \dfrac{11}{6} + \dfrac{9}{2} = \dfrac{19}{3}\,\text{u}^2$

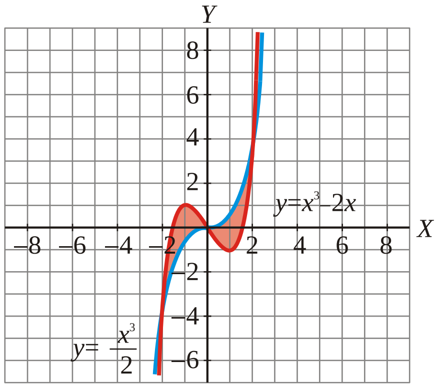
Las gráficas no son necesarias, pero las incluimos para visualizar el resultado:



Ejercicio nº 9.-

Las siguientes gráficas corresponden a las funciones:

$$y = x^3 - 2x \quad e \quad y = \frac{x^3}{2}$$



Calcula el área del recinto limitada por ellas.

Solución:

- $x^3 - 2x - \frac{x^3}{2} = \frac{x^3}{2} - 2x$

  $\frac{x^3}{2} - 2x = 0 \quad \to \quad x^3 - 4x = 0 \quad \to \quad x\left(x^2 - 4\right) = 0 \quad \to \quad x_1 = -2, x_2 = 0,\ x_3 = 2.$

- Hay dos recintos: I [-2, 0]; II [0, 2]

- $G(x) = \int \left(\frac{x^3}{2} - 2x \right) = \frac{x^4}{8} - x^2$

- $G(-2) = -2; \quad G(0) = 0; \quad G(2) = -2$

- $\text{Área del recinto I} = \left| G(0) - G(-2) \right| = 2$

  $\text{Área del recinto II} = \left| G(2) - G(0) \right| = 2$

- Área total = 2 + 2 = $4u^2$

Ejercicio nº 10.-

Calcula el área limitada por la parábola $y = x^2 + 1$, la recta $y = 4x - 3$ y el eje Y.

Solución:

- $x^2 + 1 - (4x - 3) = x^2 - 4x + 4$

  $x^2 - 4x + 4 = 0 \quad \to \quad x = 2$

  Hay un recinto [0, 2].

- $G(x) = \int (x^2 - 4x + 4) = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x$

- $G(2) = \dfrac{8}{3}$; $\quad G(0) = 0$

- $\text{Área} = |G(2) - G(0)| = \dfrac{8}{3}\,\text{u}^2$

Las gráficas no son necesarias, pero las incluimos para visualizar el resultado: